ESTADISTICA DE LA RADIACION DE FONDO DE MICROONDAS [1]

Enrique Martínez-González[a] y Sergio Torres[b]

[a] *Instituto de Física de Cantabria*
Consejo Superior de Investigaciones Científicas - Universidad de Cantabria
Santander, España.
[b] *Universidad de los Andes y Centro Internacional de Física, Bogotá, Colombia*

Resumen. En este trabajo se discuten los aspectos estadísticos de las fluctuaciones de temperatura de la Radiación de Fondo de Microondas en la esfera celeste. Debido a la no ergodicidad del campo de fluctuaciones de este fondo sobre la esfera no se puede determinar de forma exacta el modelo cosmológico de fluctuaciones de densidad a partir de las observaciones de anisotropías. Esta incertidumbre en los parámetros cosmológicos es lo que se denomina "varianza cósmica" y juega un papel muy importante en el análisis de datos de anisotropías a gran escala angular. Se obtendrá la función densidad de probabilidad de la función de correlación de temperaturas asi como la dispersión de los momentos de tercer y cuarto orden de las fluctuaciones de temperatura.

[1] *De la Astronomía a la Cosmología: estudios y resultados recientes*, Primera Escuela Nacional de Astrofísica, Ed. S. Torres, Bogotá, Nov 28 -1 Dic. 1994

INTRODUCCION

La evolución del universo se explica de forma satisfactoria mediante la teoría de la gran explosión ("big bang"). Existen tres bases observacionales fundamentales en las que se asienta esta teoría: la expansión del universo, descrita por la ley de Hubble; la nucleosíntesis primordial, que explica la formación de los núcleos atómicos ligeros (hidrógeno, helio-4, deuterio, helio-3 y litio) y sus abundancias en una etapa muy temprana y caliente del universo cuando la temperatura era de unos 10000 millones de grados kelvin; y la radiación cósmica del fondo de microondas que da cuenta de esta fase caliente del universo en base a su espectro de cuerpo negro y sus anisotropías dan validez a la teoría de la inestabilidad gravitatoria que explica la formación de galaxias y de la macroestructura del universo.

La radiación del Fondo Cósmico de Microondas (FCM) proviene de un pasado remoto y caliente de la historia del universo cuando este tenía una edad de sólo unos 300000 años. Es en este momento cuando se produce el desacoplo de la materia y la radiación, que hasta entonces estaban acoplados mediante los choques entre electrones y fotones, y ésta queda libre para propagarse hasta nosotros. La temperatura de la radiación se ve afectada por las inhomogeneidades en la densidad de materia presentes en el momento de desacoplo mediante el campo gravitatorio que producen, lo que se conoce como efecto "Sachs-Wolfe" (Sachs y Wolfe 1967). Debido al gran alcance del campo gravitatorio la escala de las fluctuaciones en la temperatura producidas por efecto Sachs-Wolfe es grande, dominando este efecto a escalas angulares por encima del grado. A escalas mas pequeñas los efectos dominantes son el efecto Doppler de los emisores al tiempo del desacoplo y las fluctuaciones de temperatura ya existentes en ese momento. Para un universo plano, $\Omega = 1$, estos tres efectos pueden expresarse de la siguiente manera:

$$\left(\frac{\Delta T}{T}\right)_{primarias} = \frac{1}{4}\delta_{\gamma r} - \mathbf{n}\cdot\mathbf{v}_r + \frac{1}{3}\phi_r \quad , \qquad (1)$$

donde

$$\mathbf{v}_r = -\frac{1}{3}(1+z_r)^{-1/2}\nabla\phi_r \quad , \tag{2}$$

$$\Delta\phi = 6\delta(\mathbf{x}) \ , \tag{3}$$

$$\delta = \delta_r(1+z_r) \quad , \tag{4}$$

$\delta_{\gamma r}$ y δ_r representan la fluctuación en la densidad de energía en forma de radiación y en la densidad de materia en el desacoplo, respectivamente, ϕ y $\mathbf{v}$ son el potencial gravitatorio y el campo de velovidades. En dichas ecuaciones se ha normalizado el factor de escala $a(t)$ al tiempo presente ($a_0 = 1$) y hemos tomado unidades tales que ($c = 8\pi G = 1$) y la distancia de horizonte al tiempo presente $d_{h0} = 3t_0 = 1$.

En el modelo estándar las anisotropías de la temperatura vienen determinadas por las condiciones existentes en el universo en el momento de la recombinación (o desacoplo, $z_r \sim 1000$; ecuación 1), posteriormente se forman los átomos de hidrógeno y el universo se hace transparente a la radiación. Por ello a estas anisotropías se las suele denominar "primarias". Sin embargo, pudieron existir procesos posteriores en la evolución del universo que podrían generar anisotropías "secundarias": a) Si la materia en el universo se reioniza a un redshift relativamente alto, $z > 30$, (debido por ejemplo a la formación de las primeras estrellas, galaxias, etc.) entonces la radiación volvería a interaccionar con los electrones borrándose las anisotropías primarias y generándose otras nuevas a escalas por debajo del grado (Vishniac 1987; Hu, Scott y Silk 1994). b) El gas caliente en cúmulos interacciona mediante efecto Compton inverso con los fotones de microondas, produciendo un decremento de la temperatura del FCM en la parte de Rayleigh-Jeans del espectro de Planck y un incremento en la parte de Wien (efecto Sunyaev-Zeldovich 1972). c) La evolución no-lineal de la materia produce también un efecto en la temperatura del FCM a escalas entre $10'-1^\circ$ (Martínez-González, Sanz y Silk 1994).

El origen de las fluctuaciones en la densidad podría encontrarse en una fase temprana de evolución inflacionaria del universo. En el modelo estándar las fluctuaciones que se producen son de tipo adiabático (la razón del número de fotones al número de partículas de cada componente material, como bariones, neutrinos masivos, axiones,..., es la misma en todos los puntos), están distribuidas gaussianamente y tienen un espectro de tipo Harrison-Zeldovich ($P(k) \propto k$; para este espectro la varianza de las fluctuaciones es aproximadamente constante en el momento que entran en el horizonte). Todo ello implica una distribución gaussiana para las fluctuaciones primarias de la temperatura del FCM. Sin embargo, las anisotropías secundarias debido a que, en general, provienen de efectos no lineales se distribuirán de una forma más complicada.

El campo de temperaturas del FCM sobre la fotoesfera cósmica es no-ergódico lo que implica que promedios sobre la esfera celeste no coinciden con promedios sobre el conjunto estadístico del campo. Este hecho produce una incertidumbre sobre los momentos de la temperatura (Abbot y Wise 1984, Gutiérrez de la Cruz et al. 1994) y consecuentemente sobre la función de autocorrelación de las fluctuaciones de temperatura (Cayón, Martínez-González y Sanz 1991, Martínez-González y Cayón 1992). Mas aún, una fracción significativa de observadores verían una distribución no-gaussiana de las fluctuaciones en su cielo (Scaramella y Vittorio 1991; Gutiérrez de la Cruz et al. 1994).

DENSIDAD DE PROBABILIDAD DE LA AUTOCORRELACION DE TEMPERATURA

Consideramos un universo de Friedmann, plano, con fluctuaciones gaussianas e invariantes de escala. La función de autocorrelación de temperaturas para un experimento con resolución angular σ viene dada por:

$$\begin{aligned} C(\alpha,\sigma) &= \langle \frac{\Delta T}{T}(\vec{n}_1,\sigma)\frac{\Delta T}{T}(\vec{n}_2,\sigma)\rangle_{sky} && (5) \\ &= \frac{1}{4}\sum_{\ell=2}^{\infty}(2\ell+1)a_\ell^2 P_\ell(\cos\alpha)\exp\left[-\left(\ell+\frac{1}{2}\right)^2\sigma^2\right], && (6) \end{aligned}$$

siendo $\vec{n}_1$ y $\vec{n}_2$ las direcciones de observación y α el ángulo entre ellas: $\cos\alpha = \vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2$. Para calcular el valor medio de la función de correlación se debe hacer un promedio sobre todas las posibles realizaciones del FCM:

$$\langle C(\alpha,\sigma) = \frac{1}{4}\sum_{\ell=2}^{\infty}(2\ell+1)\langle a_\ell^2\rangle P_\ell(\cos\alpha)\exp\left[-\left(\ell+\frac{1}{2}\right)^2\sigma^2\right]\rangle, \quad (7)$$

y

$$\sigma_\ell^2 = \langle a_\ell^2\rangle. \quad (8)$$

La resolución angular finita de los intrumentos actua como un filtro que efectivamente corta la suma a partir de un cierto término. Los coeficientes a_ℓ son variables aleatorias gaussianas y por consiguiente la suma $(2\ell+1)a_\ell^2$ tendra una distribución χ^2 con $(2\ell+1)$ grados de libertad.

Se define una nueva variable z_ℓ:

$$z_\ell = \frac{1}{4\pi}\left(\sum_{m=-\ell}^{\ell}|a_\ell^m|^2\right)P_\ell(\cos\alpha)\exp\left[-\left(\ \ell+\frac{1}{2}\right)^2\sigma^2\right], \quad (9)$$

la función densidad de probabilidad correspondiente es:

$$f_{z_\ell} = \frac{1}{2^{\frac{2\ell+1}{2}}\Gamma\left(\frac{2\ell+1}{2}\right)\overline{\sigma}_\ell}\left(\frac{z}{\overline{\sigma}_\ell}\right)^{\frac{2\ell-1}{2}}\exp\left(-\frac{z}{2\overline{\sigma}_\ell}\right) \quad (10)$$

siendo

$$\overline{\sigma}_\ell = \frac{\sigma_\ell^2}{4\pi}P_\ell(\cos\alpha)\exp\left[-\left(\ell+\frac{1}{2}\right)^2\sigma^2\right]. \quad (11)$$

La función densidad de probabilidad de $C(\alpha,\sigma)$ es la convolución de las funciones f_{z_ℓ}, lo cual se puede escribir como un producto de sus transformadas de Fourier, es decir la función caracteristica de una convolución es el producto de las funciones caracteristicas correspondientes. El resultado final que se obtiene para la función de distribución de la autocorrelacińn del FCM es:

$$F_z(u) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty} dt\Pi\left[\left(1+4t^2\overline{\sigma}_\ell^2\right)^{-\frac{2\ell+1}{4}}\right]\frac{\sin\left[B(t)+tu\right]}{t}+\frac{1}{2} \quad (12)$$

donde

$$B(t) = \sum_{\ell=2}^{m} \frac{(2\ell+1)}{2} \arctan(-2t\overline{\sigma}_\ell) \tag{13}$$

El resultado obtenido se aplica para experimentos de un solo haz, pero no es difícil hacer una generalización para una situación experimental con 'beam-switching' doble o triple. Basta con modificar $\overline{\sigma}_\ell$ para que tenga en cuenta la diferencia de la seãl en dos direcciones.

NO-ERGODICIDAD DEL CAMPO DE FLUCTUACIONES DEL FCM

Para cuantificar el carácter no ergódico del campo de fluctuaciones de la temperatura del FCM se hace un cálculo de las dispersiones de los momentos de orden 3 y 4 sobre la esfera celeste. Si el campo de fluctuaciones del FCM fuese ergódico, los momentos de orden 3 y 4 para cada observador $C^{(3)}$ y $C^{(4)}$ deberían ser iguales a sus valores medios sobre el conjunto de todos los observadores. Por lo tanto la desviación de cero de las disperciones de los momentos de orden 3 y 4 es una medida de qué tan fuerte es la no-ergodicidad. Debido a la no-ergodicidad, el campo de fluctuaciones del FCM puede presentar no gaussianidad aún en el caso de fluctuaciones primordiales en la materia que si son gaussianas. Es importante anotar que el análisis estándar de los datos del FCM se basa en la aplicación de un método Bayesiano con probabilidad 'prior' uniforme y una función de verosimilitud proporcional a la probabilidad conjunta de las densidades de probabilidad de las mediciones. Este método es limitado en cuanto supone la ergodicidad del campo, lo cual no es correcto. La no-ergodicidad del campo del FCM produce como consecuencia una dispersión intrínseca en los coeficientes a_ℓ^m y por eso mismo en $C(\alpha, \sigma)$.

El cálculo de los momentos del campo $\Delta T/T$ se hace promediando sobre la esfera celeste. El momento de order 3 se define:

$$\sigma_3 \equiv \left[\langle \left(C^{(3)} \right)^2 \rangle - \langle C^{(3)} \rangle^2 \right] \tag{14}$$

debido al caracter gaussiano de los coeficientes a_ℓ^m, el valor medio $\langle C^{(3)} \rangle$ es nulo, y haciendo uso de las simetrias de los armónicos esfericos y algunas propiedades de las integrales de productos de polinomios de Legendre se llega una expresión para la dispersión del momento de orden 3:

$$\begin{aligned}
\sigma_3^2 &= \frac{6}{4\pi}\sum_{\ell_1,\ell_2,\ell_3}(2\ell_1+1)(2\ell_2+1)(2\ell_3+1)\times \\
& \frac{(-1)^{(\ell_1+\ell_2-\ell_3)}}{\ell_1+\ell_2+\ell_3+1}b_{\ell_1}^2 b_{\ell_2}^2 b_{\ell_3}^2 \times \\
& \frac{\tau^2(\ell_1+\ell_2+\ell_3)}{\tau^2(\ell_1+\ell_2-\ell_3)\tau^2(\ell_1-\ell_2+\ell_3)\tau^2(-\ell_1+\ell_2+\ell_3)} \qquad (15)
\end{aligned}$$

donde $\tau(x) \equiv (x/2)!(x!)^{0.5}$ y la suma se hace sobre todos los valores de ℓ_1, ℓ_2 y ℓ_3 cuya suma sea par. Los coeficientes b incluyen el efecto del patrón de antena y del tipo de configuración (single, double beam,...). Por ejemplo para 'single beam':

$$b_\ell^2 = \langle a_\ell^2 \rangle \exp\left[-\ell(\ell+1)\sigma^2\right]. \qquad (16)$$

De manera similar se procede a calcular la dispersión del momento de orden 4:

$$\begin{aligned}
\sigma_4^2 &= \frac{60}{(4\pi)^4}\sum_{\ell_1,\ell_2,\ell_3,\ell_4}(2\ell_1+1)(2\ell_2+1)(2\ell_4+1)\times \\
& b_{\ell_1}^2 b_{\ell_2}^2 b_{\ell_3}^2 b_{\ell_4}^2 \langle \ell_1\ell_2 00|\ell_3 0\rangle^2 + \\
& \frac{12}{(4\pi)^4}\sum_{\ell_1,\ell_2,\ell_3}(2\ell_1+1)(2\ell_2+1)(2\ell_3+1)b_{\ell_1}^2 b_{\ell_2}^2 b_{\ell_3}^2 + \\
& \frac{24}{(4\pi)^4}\sum_{\ell_1,\ell_2,\ell_3,\ell_4}(2\ell_1+1)(2\ell_2+1)(2\ell_3+1)b_{\ell_1}^2 b_{\ell_2}^2 b_{\ell_3}^2 b_{\ell_4}^2 \times \\
& \sum_{\ell=0}^{\infty}\langle \ell_1\ell_2 00|\ell 0\rangle^2 \langle \ell\ell_3 00|\ell_4 0\rangle^2, \qquad (17)
\end{aligned}$$

los coeficientes de Clebsch-Gordan $\langle \ell_1\ell_2 00|\ell_3 0\rangle$ son diferentes de cero solo en el caso de una suma $\ell_1+\ell_2+\ell_3$ par. En la última suma sobre ℓ se debe cumplir:

$$max(|\ell_1-\ell_2|,|\ell_3-\ell_4|) \leq \ell \leq min(\ell_1+\ell_2,\ell_3+\ell_4). \qquad (18)$$

La no-ergodicidad del campo aumenta para experimentos que observan solo una pequenã región de la esfera celeste. De los resultados aquíobtenidos es claro que para el análisis de datos del FCM se requieren técnicas que tengan en cuenta la no-ergodicidad. En este sentido el análisis de datos usando las propiedades geométricas de las curvas de nivel de iso-temperatura ofrece un gran potencial (Torres et al. 1994).

REFERENCIAS

Abbott, L. F. & Wise, M. B. 1984, ApJ, 282, L47

Cayón, L., Martínez-González, E & Sanz, J. L. 1991, MNRAS,253, 599

Gutiérrezde la Cruz et al. 1994, MNRAS, en prensa

Hu, W., Scott, D. & Silk, J. 1994. Enviado a Phys. Rev. D.

Martínez-González, E., Sanz, J. L. y Silk, J. 1994, Enviado a ??

Martínez-González, E. & Cayón, L. 1992, Kluer eds, in NATO ASI: Infrared and Submilimetre Sky After COBE, Les Houches, p303

Sachs, K. & Wolfe, A. M.1967, APJ, 147, 73

Scaramella, R. and Vittorio, N. 1991, ApJ, 375, 439

Sunyaev, R. A. & Zeldovich, Ya. B. 1972, Comm. Astrophys. Sp. Phys. 4, 173

Torres, S. et al. 1994, Enviado a MNRAS

Vishniac, E. T. 1987, ApJ, 322, 597