

OBTENCION DEL ESPECTRO PRIMORDIAL ¹

Rafael Bautista^a y Sergio Torres^{a,b}

^a*Universidad de los Andes, Bogotá, Colombia*
y ^b*Centro Internacional de Física*

Resumen. Las anisotropías presentes en la radiación cósmica de fondo permiten sondear la forma del espectro primordial de perturbaciones en la densidad de la materia, $P(k)$. Se presenta un algoritmo para obtener $P(k)$ a partir del espectro angular de potencia de la radiación cósmica de fondo.

INTRODUCCION Y DEFINICIONES

En el periodo inmediatamente anterior al desacople, las fluctuaciones de la densidad de la materia tenían una distribución estadísticamente idéntica a las del gas de fotones acompañante. Dichas fluctuaciones, cuando se consideran únicamente efectos de escala muy grande, se traducen en variaciones del potencial gravitatorio de la materia que serían recogidas en las correspondientes fluctuaciones de la temperatura de la radiación. Para un observador ubicado en el presente, las fluctuaciones en la temperatura de la radiación cósmica de fondo (RCF) debido a estos efectos está dada por:

¹*De la Astronomía a la Cosmología: estudios y resultados recientes*, Primera Escuela Nacional de Astrofísica, Ed. S. Torres, Bogotá, Nov 28 -1 Dic. 1994

$$\frac{\delta T}{T} = \frac{\hat{n}}{c} \cdot (\vec{v}_0 - \vec{v}_e) - \frac{1}{3c^2} [\phi(0) - \phi(\vec{x}_e)]. \quad (1)$$

Los dos primeros términos corresponden a efectos cinemáticos. Los dos últimos a variaciones del potencial, los cuales serán dominantes para ángulos grandes. La razón de esto se puede ver estimando su orden de magnitud según el siguiente razonamiento:

$$\frac{1}{c^2} \delta\phi \sim \frac{2G\delta M}{Lc^2} \approx \frac{8\pi GL^2}{3c^2} \delta\rho = \frac{8\pi\bar{\rho}L^2}{3c^2} \left(\frac{\delta\rho}{\bar{\rho}}\right) \quad (2)$$

o

$$\frac{\delta\phi}{c^2} \approx \left(\frac{HL}{c}\right)^2 \left(\frac{\delta\rho}{\bar{\rho}}\right). \quad (3)$$

Por otro lado

$$\frac{v}{c} \sim \frac{\delta\phi}{HcL} \approx \left(\frac{HL}{c}\right) \left(\frac{\delta\rho}{\bar{\rho}}\right). \quad (4)$$

Con algo más de precisión (con $c = 1$)

$$\left(\frac{\delta T}{T}\right)_{potencial} = -\frac{1}{3} G\bar{\rho}_0 \int d^3x' \frac{\delta(\vec{x}', t_0)}{|\vec{x}_e - \vec{x}'|} \quad (5)$$

con

$$\vec{x}_e \approx \hat{n} \int_0^{t_0} \frac{dt}{a(t)} = \hat{n}\eta \quad (6)$$

Si ponemos $G\bar{\rho}_0 = 3H_0^2/8\pi$ y pasando a componentes de Fourier:

$$\frac{\delta T(\hat{n})}{T} = -\frac{1}{2} H_0^2 \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{\delta_{\vec{k}}}{k^2} \exp(-i\vec{k} \cdot \vec{x}_e). \quad (7)$$

Con esta expresión se puede proceder a evaluar la función de correlación angular

$$C(\alpha) = \left\langle \frac{\delta T(\hat{n})}{T} \frac{\delta T(\hat{m})}{T} \right\rangle, \quad (8)$$

con $\hat{n} \cdot \hat{m} = \cos \alpha$.

Por un lado se puede escribir

$$\frac{\delta T(\hat{n})}{T} = \sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{m=-\ell}^{\ell} a_{\ell m} Y_{\ell m}(\theta, \phi), \quad (9)$$

en donde θ, ϕ son los ángulos polares en la dirección de \hat{n} .

Los $a_{\ell m}$ son variables aleatorias con distribución gaussiana que cumplen

$$\langle a_{\ell m} a_{\ell' m'} \rangle = C_{\ell} \delta_{\ell \ell'} \delta_{m m'}. \quad (10)$$

Con lo cual

$$C(\alpha) = \frac{1}{4\pi} \sum_{\ell=0}^{\infty} (2\ell + 1) C_{\ell} P_{\ell}(\cos \alpha). \quad (11)$$

Por otro lado, utilizando la expresión integral para $\delta T(\hat{n})/T$, tenemos

$$C_{\ell} = \frac{V^{-1} H_0^4}{2\pi} \int_0^{\infty} dk \frac{|\delta_k|^2}{k^2} (j_{\ell}(k\eta))^2, \quad (12)$$

o en otras palabras,

$$\langle |a_{\ell m}|^2 \rangle = \frac{V^{-1} H_0^4}{2\pi} \int_0^{\infty} \frac{|\delta_k|^2}{k^2} (j_{\ell}(k\eta))^2. \quad (13)$$

$|\delta_k|^2$ se conoce como el “espectro de potencia”. Este espectro de potencia es el cuadrado absoluto de la componente “k” de Fourier de las fluctuaciones de densidad, las cuales se definen a través de

$$\delta(\vec{x}, t) = \frac{\rho(\vec{x}, t) - \bar{\rho}(t)}{\bar{\rho}(t)} \quad (14)$$

y

$$\delta(\vec{x}, t) = V \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \delta_{\vec{k}}(t) \exp(i\vec{k} \cdot \vec{x}). \quad (15)$$

V es un volumen “grande” de normalización. Las fluctuaciones relativas de materia dentro de una esfera de radio R se pueden expresar en términos del espectro $|\delta_k|^2$, de acuerdo a la expresión

$$\left\langle \left(\frac{\delta M}{M} \right)_R^2 \right\rangle \approx \int_0^{R^{-1}} \frac{V^{-1}}{2\pi^2} k^3 |\delta_k|^2 \frac{dk}{k}. \quad (16)$$

El COBE produce resultados para valores de los $|a_{\ell m}|^2$, los cuales permiten un conocimiento (parcial) de $|\delta_k|^2$. También hay medidas astronómicas de $\langle (\delta M/M)_R^2 \rangle$. Qué grado de consistencia habrá entre estos dos resultados?

Tradicionalmente se ha modelado al espectro de potencia con una función del tipo

$$|\delta_k|^2 = V A k^n, \quad (17)$$

para k pequeño.

ALGORITMO

Una forma de “determinar” $|\delta_k|^2$ es mediante el ajuste de los valores de los parámetros A y n . A es la amplitud de normalización del espectro y n se conoce como el “índice espectral”.

Hay cierto prejuicio teórico, en la actualidad justificado a través de argumentos inflacionarios, a favor de $n = 1$, es decir

$$|\delta_k|^2 = V A k. \quad (18)$$

Esta es la forma de Harrison-Zeldovich (Harrison 1970; Zeldovich 1972). Con este valor de n , los datos del COBE producen

$$A = (24 \pm 4 \text{ Mpc})^4 \quad (19)$$

Hay, sin embargo, una forma de estimar la dependencia funcional de $|\delta_k|^2$ para k pequeño que no depende de ningún tipo de parametrización.

Lo esencial de la relación entre $\langle |a_{\ell m}|^2 \rangle$ y $|\delta_k|^2$ se puede expresar así:

$$\langle |a_{\ell m}|^2 \rangle = (norm) \int_0^\infty dk |\delta_k|^2 \left(\frac{j_\ell(k\eta)}{k} \right)^2. \quad (20)$$

En donde *norm* es un factor constante.

Tanto $|\delta_k|^2$ como $(j_\ell(k\eta)/k)^2$ son funciones positivas y, además, la integral

$$I_\ell = \int_0^\infty dk \left(\frac{j_\ell(k\eta)}{k} \right)^2 \quad (21)$$

converge para $\ell \geq 1$.

Para simplificar la notación pondremos de ahora en adelante $P(k) \equiv |\delta_k|^2$. A continuación obsérvese que la integral que define a $\langle |a_{\ell m}|^2 \rangle$ acepta la prescripción del teorema del valor medio:

$$\int_0^\infty dk P(k) \left(\frac{j_\ell(k\eta)}{k} \right)^2 = P(\bar{k}_\ell) I_\ell. \quad (22)$$

Puesto que estamos trabajando para reconstruir a $P(k)$ para k pequeño, y presumiblemente éste seguiría una ley de potencias, se puede estimar el valor del argumento \bar{k}_ℓ mediante el siguiente procedimiento:

Definamos:

$$(\bar{k}_\ell)^s = \frac{1}{I_\ell} \int_0^\infty dk k^s \left(\frac{j_\ell(k\eta)}{k} \right)^2 \quad (23)$$

en donde s es cualquier exponente real tal que

$$-2\ell + 1 < s \leq 2, \quad (24)$$

por razones de convergencia de las integrales.

En la práctica basta con ensayar $0.5 \leq s \leq 2$. \bar{k}_ℓ varía un poco para diferentes valores de s . Pero es bastante insensible, con variaciones del orden del 10%.

En vista de esto, se justifica investigar la tabla \bar{k}_ℓ vs. $P(\bar{k}_\ell)$ que se produce eligiendo cualquier valor “razonable” de s . Elegimos para ensayar $s = 2$. Con esa tabla se procede a hacer un fit de tipo χ^2 con la forma funcional $P(k) = V A k^n$.

Utilizando los datos del COBE para $|a_{\ell m}|^2$ y la fórmula con la normalización dada por S. Torres et. al. (1994) los resultados son los siguientes:

$$A = 39.25_{-20.6}^{+31.5}, n = 1.498_{-0.256}^{+0.297}. \quad (25)$$

Con $\chi^2 = 6.225$ (11 DOF). Estos resultados producen la gráfica dada en la figura 1.

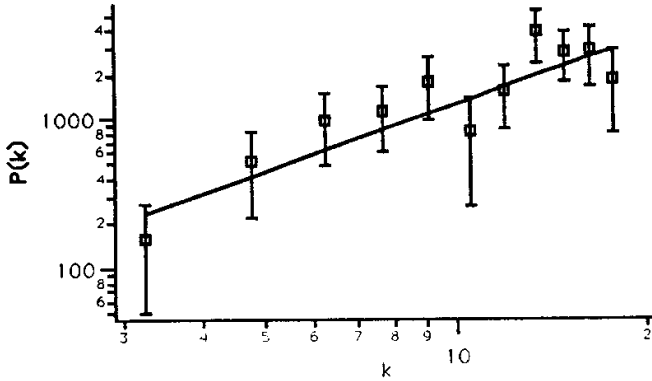


Figure 1: Ajuste de mínimos cuadrados para los valores reconstruidos de $P(k)$

En vista de este resultado, se procede a realimentar la información que da el ajuste χ^2 dentro del procedimiento descrito y se elige $s = 1.5$. Pero esto sólo mejora marginalmente los resultados ya obtenidos.

Aunque el procedimiento de valores medios da resultados preliminares de mucho interés, y es susceptible de extenderse aún más de lo que se describe en los párrafos anteriores, existen maneras sistemáticas de filtrar la función $P(k)$ a partir de los datos del COBE para los coeficientes $|a_\ell|^2$, los cuales vienen definidos mediante la relación

$$\langle |a_\ell|^2 \rangle = (2\ell + 1) \langle |a_{\ell m}|^2 \rangle. \quad (26)$$

Con esta definición, la fórmula de Torres et al. para los $\langle |a_\ell|^2 \rangle$ es:

$$\langle |a_\ell|^2 \rangle = \left(\frac{4\pi}{5} \right)^2 (2\ell + 1) \int_0^\infty dk P(k) \left(\frac{j_\ell(k)}{k} \right)^2. \quad (27)$$

En la cual se hizo el cambio de variable $k\eta \rightarrow k$, con la escogencia de $\eta = 6000$ Mpc.

Para este cálculo se ha empleado el conjunto de datos suministrado por la misión COBE para los primeros dos años (Bennett et al. 1994). Los valores de los $|a_\ell|^2$ utilizados corresponden a $\ell = 2, 3, \dots, 12$.

Sean $k_{\ell i}$ las raíces de los $j_\ell(k)$, con $i = 0, 1, 2, \dots$. En todos los casos se tiene $k_{\ell 0} = 0$. A continuación, defínanse las cantidades:

$$B_{\ell i} = \int_{k_{\ell i}}^{k_{\ell, i+1}} dk \left(\frac{j_\ell(k\eta)}{k} \right)^2 \quad (28)$$

y

$$(\bar{k}_{\ell i})^s = \frac{1}{B_{\ell i}} \int_{k_{\ell i}}^{k_{\ell, i+1}} dk k^s \left(\frac{j_\ell(k\eta)}{k} \right)^2. \quad (29)$$

Con estas definiciones se tiene la identidad aproximada:

$$\langle |a_\ell|^2 \rangle \approx \left(\frac{4\pi}{5} \right)^2 (2\ell + 1) \sum_{i=0}^{\infty} P(\bar{k}_{\ell i}) B_{\ell i}. \quad (30)$$

A continuación se construyen vectores columna \vec{A} y \vec{P} , con componentes respectivas dadas por $|a_\ell|^2 / (2\ell + 1)$, con $\ell = 2, 3, \dots, 12$; y $P(\bar{k}_{2i})$, con $i = 0, 1, 2, \dots, 10$. El resto de los valores $P(\bar{k}_{\ell i})$ para los cuales $\ell \neq 2$ se expresan como interpolaciones de las componentes de \vec{P} . Con estas definiciones, la última ecuación se podría expresar de la siguiente manera:

$$\vec{A} = \tilde{M} \cdot \vec{P} + \text{residuo}, \quad (31)$$

en donde \tilde{M} es una matriz de dimensiones 11×11 y “residuo” se refiere a todo el restante de la ecuación que queda por fuera

de estas dimensiones. Ese residuo depende de valores de $P(k)$ que están más allá de los que se incluyen en la definición de \vec{P} .

Una primera aproximación para resolver el sistema de ecuaciones lineales propuesto más arriba es la de simplemente poner el residuo igual a cero. Si se hace esto, la ecuación anterior se puede invertir para obtener los valores correspondientes de $P(\bar{k}_{2i})$. Tras algunos ensayos, se puede comprobar que este procedimiento sólo reproduce con suficiente grado de confiabilidad a los primeros valores de componentes de \vec{P} . Con ese conocimiento, se puede redefinir ahora al vector de incógnitas \vec{P} , con componentes $P(\bar{k}_{2i})$ que van, por ejemplo, en el rango $i = 2, \dots, 12$. Además se redefine al vector \vec{A} sustrayendo la información que proveen las incógnitas ya resueltas y se plantea de nuevo el sistema lineal ya descrito con anterioridad, en donde de nuevo se asume que el residuo es igual a cero. Puesto que se puede demostrar que a medida que se avanza a lo largo del eje “k” dicho residuo debe tender a cero, cada iteración del procedimiento descrito conduce a resultados más confiables. De esta manera se puede extraer un conjunto muestra de valores de la función $P(k)$ evaluada en los argumentos \bar{k}_{2i} .

REFERENCIAS

- Bennett, C. L., et al. COBE-PREPRINT 94-01
Harrison, E. R. 1970, Phys. Rev. D, 1, 2726
Torres, S. et al. 1994, Astron. Astrophys. 287, 15
Zeldovich, Ya. B. 1972, MNRAS, 160, 1P