

# RADIACION COSMICA DE FONDO Y PRUEBA DE MODELOS COSMOLOGICOS <sup>1</sup>

Sergio Torres

*Centro Internacional de Física y Universidad de los Andes,  
Bogotá, Colombia*

**Resumen.** Se dan resultados del análisis de los datos de COBE del segundo año usando las características geométricas de las curvas de iso-temperatura de mapas de radiación cósmica de fondo. Según el modelo cosmológico estándar la formación de estructura a gran escala en el universo ocurre a partir del colapso gravitacional de grandes nubes de materia que a su vez fueron producidas por fluctuaciones primordiales en la densidad de materia en el universo temprano. Un modelo cosmológico con un espectro primordial de perturbaciones en la densidad de materia con índice espectral  $n : 0.8 - 1.3$ ,  $P(k) \propto k^n$ , es consistente con los datos.

## INTRODUCCION

La radiación cósmica de fondo (RCF) es el resultado de las altas temperaturas que han debido caracterizar el universo temprano. Al

---

<sup>1</sup>*De la Astronomía a la Cosmología: estudios y resultados recientes*, Primera Escuela Nacional de Astrofísica, Ed. S. Torres, Bogotá, Nov 28 -1 Dic. 1994

tiempo correspondiente a  $z_{dec} = 1000$ , la temperatura del universo baja lo suficiente para permitir la formación de átomos neutros y por consiguiente el medio se hace transparente para la radiación. Para una introducción al tema ver “Introducción a la Física de la Radiación Cómica de Fondo” en estas memorias, la notación aquí usada también se basa en lo expuesto en ese artículo. La interacción de la radiación con la materia antes del desacople y con el campo gravitacional durante el desacople debe dejar una marca en la RCF que, si no han ocurrido otros procesos después del desacople que borren las anisotropías, aparece hoy como pequeñas fluctuaciones en el valor de la temperatura,  $\Delta T/T_0$ .

En el caso del proyecto COBE, el instrumento DMR tiene una resolución angular de  $\approx 3^\circ$ , lo cual lo hace sensible a fluctuaciones producidas por el efecto Sachs-Wolfe (1987) y por lo tanto los datos medidos a estas escalas son ideales para inferir la forma del espectro primordial de perturbaciones en la densidad de la materia,  $P(k)$ . En general se entiende por ‘modelo cosmológico’ el conjunto de parámetros  $h, \Lambda, \Omega_0, \Omega_b, n$  y  $Q$  (constante de Hubble normalizada a  $100 \text{ Km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$ , constante cosmológica, parámetro de densidad, densidad bariónica, índice espectral y amplitud en  $P(k) \propto Q^2 k^n$  respectivamente). Aunque los datos de RCF pueden ser útiles para probar consistencia de algunos valores de los parámetros mencionados, aquí se restringe el estudio a lo referente al espectro primordial.

La existencia de grandes flujos de velocidad peculiar y de grandes estructuras en la distribución de materia a gran escala en el universo como ‘la gran muralla’ y el ‘gran atractor’ tienen origen en fluctuaciones del potencial gravitacional en épocas muy remotas del universo. Una vez que el universo comienza a ser dominado por materia, las nubes de masa asociadas a fluctuaciones que han entrado al horizonte y para las cuales su escala de longitud es mayor que la escala de Jeans y mayor que las escalas de ‘Landau damping’ y ‘Silk damping’ colapsan por la acción de la gravedad. El espectro primordial de potencias de las fluctuaciones en la densidad de materia,  $P(k)$ , se define por la amplitud de las componentes de Fourier

según su número de onda  $k$ :

$$P(k) = |\delta_k|^2 \quad (1)$$

$$\frac{\delta\rho}{\rho}(\vec{x}) = \frac{V}{(2\pi)^3} \int \delta_k \exp(-i\vec{k} \cdot \vec{x}) d^3k. \quad (2)$$

Para un espectro que siga una ley de potencias con índice espectral  $n$ ,  $P(k) \propto Q^2 k^n$ , una solución analítica aproximada del efecto Sachs-Wolfe permite expresar los coeficientes armónicos con la amplitud y el índice espectral de  $P(k)$  (Bond & Efstathiou 1987):

$$C_\ell = \frac{4\pi}{5} Q^2 \frac{\Gamma(\ell + \frac{n-1}{2}) \Gamma(\frac{9-n}{2})}{\Gamma(\ell + \frac{5-n}{2}) \Gamma(\frac{3+n}{2})}. \quad (3)$$

## METODO DE ANALISIS

En el momento de confrontar las diversas posibilidades teóricas con los datos disponibles aparecen dificultades serias que obedecen a la naturaleza estocástica de los datos, la no ergodicidad del campo aleatorio de la RCF, las complejidades del proceso de medición y a los errores experimentales. De no tener en cuenta estos factores cualquier conclusión derivada del análisis de estos datos carecería de significado. La naturaleza estocástica de los datos aparece como consecuencia del hecho que la variable que se mide es una cantidad relacionada con fluctuaciones de un campo escalar (la temperatura). Un mapa de RCF es una ‘foto’ del estado del campo escalar en el momento de desacople, es decir, representa la medición de una sola realización dentro de muchas posibles. Por otro lado, las teorías predicen únicamente los valores medios de estas cantidades. Este es el problema de la *varianza cósmica*, es decir, los coeficientes  $a_{\ell,m}$  tienen una dispersión intrínseca. Para el análisis de los datos de RCF también es necesario tener en cuenta los detalles experimentales que puedan introducir un sesgo a los datos, tales

como el cubrimiento no homogéneo de la esfera celeste y los efectos de ‘pixelización’. Por último, existe la limitante impuesta por el ruido intrínseco de los receptores y los errores sistemáticos como la contaminación galáctica, imprecisiones en la calibración y otras fuentes de contaminación. Para tener en cuenta todos estos aspectos es necesario usar técnicas estadísticas adecuadas y aplicarlas a un conjunto de realizaciones Monte Carlo generadas mediante simulaciones que incluyen todos los posibles efectos que puedan afectar a los datos.

La existencia de estructura en un mapa de RCF se cuantifica usando la función de correlación angular  $C(\alpha)$  o el espectro angular de potencia  $C_\ell$ , relacionados por:

$$C(\alpha) = \frac{1}{4\pi} \sum_{\ell} (2\ell + 1) C_{\ell} P_{\ell}(\cos \alpha). \quad (4)$$

Para un campo de fluctuaciones gaussiano las dos funciones son equivalentes y definen el campo unívocamente. Normalmente se compara la función de correlación o el espectro de potencias teórico con los datos mediante un estadístico como el  $\chi^2$  que se minimiza (o alternativamente se maximiza la función de verosimilitud) resultando así los valores de los parámetros  $Q$  y  $n$  que mejor ajustan las observaciones, haciendo uso de la fórmula (3) (Seljak & Bertschinger 1993). Otro método para relacionar los datos con los parámetros de los modelos se basa en el uso de descriptores topológicos para medir las características geométricas del campo de fluctuaciones. Existen relaciones analíticas entre los parámetros de los modelos y las características geométricas de los contornos de iso-temperatura de mapas de RCF (Adler 1981).

## Descriptores Topológicos

El género es definido como la curvatura total de los contornos de iso-curvatura de mapas de RCF a un nivel de umbral  $\nu$  (Gott

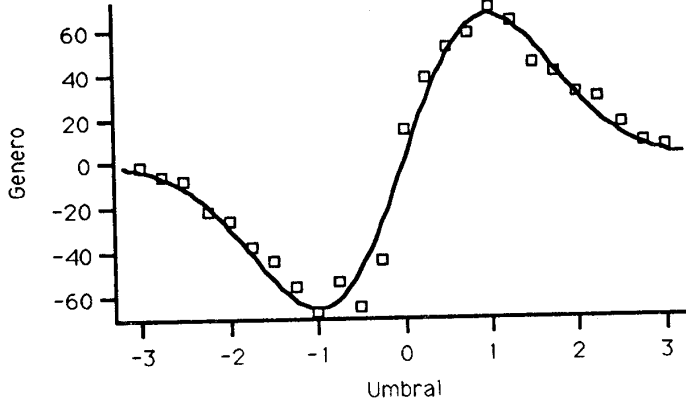


Figure 1: Género de los datos del COBE y curva teórica  $G_\nu$

et al. 1990). El valor medio del género para un campo aleatorio gaussiano depende del ángulo de coherencia  $\theta_c$ :

$$\langle G_\nu \rangle = \left(\frac{2}{\pi}\right)^{1/2} \frac{\nu}{\theta_c^2} \exp\left(-\frac{\nu^2}{2}\right) \quad (5)$$

$$\theta_c = \left(-\frac{C(0)}{C''(0)}\right)^{1/2}. \quad (6)$$

El nivel de umbral se da en términos de desviaciones estándar de temperatura,  $\nu = T/\sigma_T$ . El ángulo de coherencia es definido como el cociente entre la función de correlación de temperatura y su derivada segunda en el origen. La Fig. 1 muestra los datos del género de COBE y la curva teórica (6) que mejor los ajusta.

Otro descriptor topológico es la densidad de manchas a umbral  $\nu$  y está dado por:

$$\langle N_\nu \rangle = \left(\frac{2}{\pi\theta_c^2}\right) \frac{\exp(-\nu^2)}{\operatorname{erfc}(\nu/\sqrt{2})}. \quad (7)$$

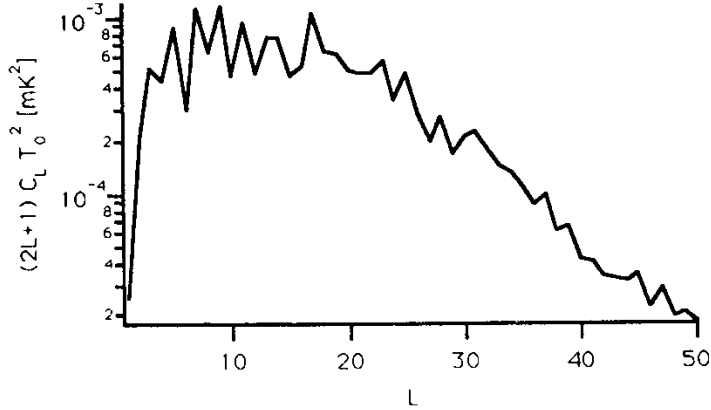


Figure 2: Espectro angular de potencia del ruido obtenido a partir de los mapas (A-B) de 53 GHz de COBE

El ángulo de coherencia encierra en un sólo parámetro la caracterización de un campo que experimenta fluctuaciones y el género es un estimador no sesgado del ángulo de coherencia. Se puede hallar una relación entre los parámetros del modelo ( $n$  y  $Q$ ) y el ángulo de coherencia usando la fórmula (4) en la definición de  $\theta_c$  (6). El resultado es:

$$\theta_c^2 = 2 \frac{\sum_{\ell} (2\ell + 1)(C_{\ell,S} + C_{\ell,N})}{\sum_{\ell} \ell(\ell + 1)(2\ell + 1)(C_{\ell,S} + C_{\ell,N})}, \quad (8)$$

$$C_{\ell} = \langle a_{\ell}^2 \rangle \exp(-\ell(\ell + 1)\sigma_{eff}^2),$$

donde  $\sigma_{eff}$  representa el suavizado gaussiano efectivo,  $C_{l,S}$  y  $C_{l,N}$  son los coeficientes de Legendre para la señal y el ruido respectivamente, es decir los coeficientes en la expansión (4). Los coeficientes para la señal están conectados al modelo a través de (3). Los valores de los coeficientes armónicos para el ruido se pueden obtener mediante un ajuste de mínimos cuadrados de una expansión armónica a los mapa diferencia  $A - B$  (Fig. 2).

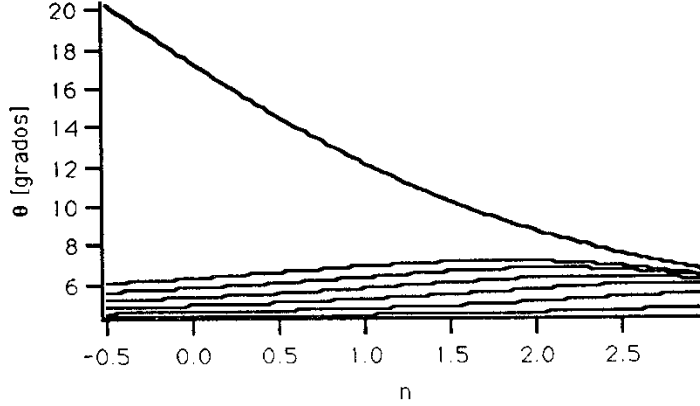


Figure 3: Ángulo de coherencia con respecto al índice espectral  $n$  para diferentes valores de  $Q$  : 5, 10, 15, 20, 25 y 30  $\mu\text{K}$ . Las curvas se acercan al eje horizontal a medida que la amplitud  $Q$  decrece. La curva que da valores más grandes de  $\theta_c$  corresponde a  $r = \infty$  y es independiente de  $Q$ .

El ángulo de coherencia resultante de la combinación de dos campos aleatorios con  $\theta_c$  conocidos, se puede hallar usando la definición (6) y reconociendo que la expansión de Legendre (4) del campo combinado es la suma de cada una de las contribuciones. Por ejemplo en el caso real de mapas con ruido  $\theta_N$  y señal  $\theta_S$ , el ángulo de coherencia resultante es (Fig. 3):

$$\theta_c^{-2} = \frac{\theta_N^{-2} + r\theta_S^{-2}}{1 + r}, \quad (9)$$

donde  $r$  es el cociente señal-a-ruido:

$$r = \frac{\sum_l C_{l,S}}{\sum_l C_{l,N}} = \frac{\sigma_S^2}{\sigma_N^2}. \quad (10)$$

En la Fig. 4 se ilustra esta relación, usando los coeficientes  $a_{\ell,m}$  de ruido que aparecen en la Fig. 2 y suponiendo un modelo con  $n = 1$ . Se puede apreciar como al disminuir el ruido, el ángulo de coherencia tiende asintóticamente a su valor teórico de  $\approx 12^\circ$ .

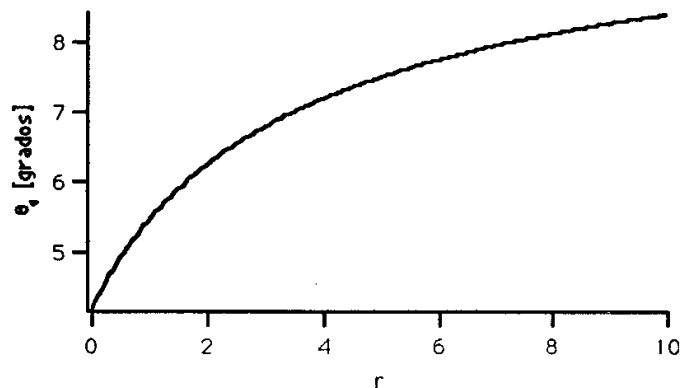


Figure 4: Relación entre el ángulo de coherencia y el factor señal-a-ruido para un experimento como COBE que observa un universo con  $n = 1$

### Simulaciones Monte Carlo

Tanto la incertidumbre intrínseca en la determinación de los parámetros de cualquier modelo causada por la varianza cósmica, como los efectos de ruido instrumental, cubrimiento de la esfera celeste, corte galáctico y pixelización se pueden tener en cuenta generando realizaciones de mapas de RCF con un programa simulador del experimento. Los mapas se generan en una cuadrícula plana en la superficie de la esfera dividida en 6144 pixels de igual área. La división de la superficie de la esfera se puede obtener proyectando las divisiones hechas sobre las caras de un cubo en el cual la esfera está circunscrita (Torres et al. 1989). Cada una de las caras del cubo se divide en  $32 \times 32$  pixels de igual área. Para mantener iguales las áreas proyectadas en la esfera se deben hacer algunas correcciones.

La temperatura en un pixel con centro en coordenadas polares



$\theta, \phi$  viene dada por:

$$T(\theta, \phi) = \sum_{\ell=2}^{\ell} \sum_{m=0}^m k N_{\ell}^m W_{\ell} P_{\ell}^m(\cos \theta) [b_{\ell,m} \cos(m\phi) + b_{\ell,-m} \sin(m\phi)]; \quad (11)$$

$$N_{\ell}^m = \left[ \frac{(2\ell + 1)(\ell - m)!}{4\pi(\ell + m)!} \right]^{1/2}$$

donde  $k = \sqrt{2}$  para  $m \neq 0$  y  $k = 1$  para  $m = 0$ ;  $P_{\ell}^m(\cos \theta)$  son los polinomios asociados de Legendre; los coeficientes  $b_{\ell,m}$  son variables estocásticas reales distribuidas gaussianamente con promedio nulo y varianza dependiendo del modelo según la fórmula (3). La función filtro  $W_{\ell}$  para el instrumento DMR está dada en Wright et al. (1994a). Para cada realización se generan dos mapas sumando las contribuciones de ruido y la señal cósmica. Los dos mapas corresponden a los dos canales (A y B) de DMR a cada frecuencia. El ruido es simulado con una distribución normal con desviación estándar proporcional a la sensibilidad del radiómetro y al número de observaciones de cada pixel, que a su vez depende del cubrimiento de la esfera celeste permitido por la órbita del satélite. También se aplica una pequeña corrección al efecto de ‘corrimiento’ en la temperatura de un pixel causada por el movimiento del satélite durante el período de integración de la señal de 0.5 s. Con los dos mapas así generados se forman el mapa suma =  $(A + B)/2$  y el mapa diferencia =  $(A - B)/2$ . En el mapa suma el factor señal a ruido aumenta en un factor  $\sqrt{2}$ , mientras que en el mapa diferencia la señal desaparece y solo queda la contribución del ruido. De idéntica manera a lo que se hace con los datos reales, a los mapas resultantes se les hace un suavizado gaussiano ( $\sigma = 2.9^{\circ}$ ) para reducir el nivel de ruido.

## ANÁLISIS Y RESULTADOS

El análisis de los datos consiste en determinar el valor del parámetro  $n$  (fijando  $Q$ ) que maximiza la probabilidad  $\Pi$  de que los datos

$G_{\nu, COBE}$  puedan venir del modelo  $(Q, n)$ . Más exactamente  $\Pi$  es la probabilidad de que el valor del estadístico  $\chi^2$  para un modelo dado tenga un valor mayor o igual al  $\chi_{COBE}^2$  obtenido de los mapas de COBE. El estadístico  $(\chi^2)_k$  de la realización  $k$ -ésima es:

$$(\chi^2)_k = \sum_{i=1}^{25} \sum_{j=1}^{25} (G_{i,k} - \langle G_i \rangle) M_{ij}^{-1} (G_{j,k} - \langle G_j \rangle). \quad (12)$$

$G_{i,k}$  es el género de la  $k$ -ésima realización a umbral  $i$ . Se usaron 25 niveles de umbral igualmente distanciados ( $\nu : -3.0, \dots, 3.0$ );  $\langle G_i \rangle$  es el valor medio del género a umbral  $i$  para todas las realizaciones. La matriz de covarianza,  $M_{ij}$ , también se obtiene de las realizaciones Monte Carlo:

$$M_{ij} = \frac{1}{N_{realiz.}} \sum_{k=1}^{N_{realiz.}} (G_{i,k} - \langle G_i \rangle)(G_{j,k} - \langle G_j \rangle). \quad (13)$$

Se puede definir de igual forma un estadístico basado en el número de manchas  $N_\nu$ .

En la tabla 1 se muestra la probabilidad  $\Pi$  para varios valores de  $n$ . De ésta se deduce que el intervalo  $n : 0.8 - 1.3$  es consistente con los datos de COBE del segundo año ( $\Pi > 68\%$ ). Este resultado se obtiene bajo el supuesto de que la amplitud del espectro es conocida. Se ha usado el valor dado por el grupo COBE de  $Q = 12.0 \mu\text{K}$  obtenido usando un análisis independiente con la función de correlación (Bennett et al. 1994). Si se deja a  $Q$  como un parámetro libre, es claro por la relación (8) que debido a la varianza cósmica es posible obtener el mismo ángulo de coherencia para una combinación de valores de  $Q$  y  $n$ . Se puede hacer, por ejemplo,  $n$  grande y  $Q$  pequeño o viceversa sin cambiar  $\theta_c$ . Aparece una anticorrelación entre  $Q$  y  $n$  que hace imposible determinar unívocamente sus valores usando únicamente los datos de anisotropía de la RCF a escalas angulares grandes y por lo tanto es necesario hacer uso de la información disponible a escalas más pequeñas, como en Torres et al. (1994a). Una forma explícita de la correlación  $Q(n)$  fue encontrada para los datos de COBE del primer año por Torres et.

Table 1: Probabilidad  $\Pi$  de obtener  $\chi^2 > \chi_{COBE}^2$ , suponiendo diferentes hipótesis parametrizadas con  $n$  y con  $Q$  fijo a  $12 \mu\text{K}$ .

$n$	$\chi_{53}^2$	$\Pi$
0.200	22.622	55.379
0.400	22.356	60.722
0.600	20.437	72.428
0.800	20.801	67.698
1.000	20.170	74.321
1.200	19.413	77.784
1.400	20.322	70.296
1.600	22.074	62.682
1.800	21.101	65.805
2.000	25.787	43.731
2.200	24.944	45.220
2.400	26.080	38.020
2.600	25.592	45.283
2.800	28.047	29.969

al. (1994c):  $Q(n) = 22.2 \pm 1.7 - (4.7 \pm 1.3) \times n \mu\text{K}$ . El anterior resultado fue encontrado usando el valor medio de un estadístico similar al  $\chi^2$  empleado aquí, pero reemplazando  $\langle G_\nu \rangle$  por  $G_{\nu,COBE}$  en (12). Estos resultados se muestran en la Fig. 5.

El rango de valores de  $n$  obtenido está de acuerdo con los valores encontrados usando otras técnicas estadísticas, y es consistente con el valor predicho por el modelo inflacionario  $n = 1$ . En la tabla 2 se hace la comparación.

Table 2: Amplitud ( $Q$  en  $\mu\text{K}$ ) y pendiente ( $n$ ) del espectro primordial, obtenidos de los datos del COBE usando diferentes métodos estadísticos. La función  $Q(n)$  representa explícitamente la degeneración entre los parámetros  $Q - n$ . Referencias: 1 - Smoot *et al.* 1992; 2 - Bennett *et al.* 1994; 3 - Smoot *et al.* 1994; 4 - Wright *et al.* 1994b; 5 - Górski *et al.* 1994; 6 - Torres *et al.* 1994a; 7 - Hu *et al.* 1994; 8 - Wright *et al.* 1994a; 9 - Torres 1994b; 10 - Bond 1994; 11 - Torres *et al.* 1994c; 12 - Seljak 1993.

Método	$Q$	$n$	ref
Fit to $C(\alpha)$	$17 \pm 5$	$1.1 \pm 0.5$	1
Max. like. $C(\alpha)$	$12.4^{+5.2}_{-3.3}$	$1.59^{+0.49}_{-0.55}$	2
Fit to $\sigma_{sky}$	$13.2 \pm 2.5$	$1.7^{+0.3}_{-0.6}$	3
Power $53 \times 90$		$1.46 \pm 0.4$	4
Power 53		$1.24 \pm 0.36$	5
Power 90		$1.29 \pm 0.46$	5
Fit to $C(\alpha)$		$0.76 \pm 0.3$	6
Fit to $\sigma_{sky}$		$< 1.6$	7
Fit to $\sigma_{sky}$	$17.1 \pm 2.9$	1 fixed	8
Genus statistic	16 fixed	$1.2 \pm 0.3$	9
S/N eigen-mode		$1.8 \pm 0.5$	10
Genus statistic	$15.7 \pm 2.2 - (16.6 \pm 0.3)(n - 1)$		3
Genus statistic	$22.2 \pm 1.7 - (4.7 \pm 1.3)n$		11
Max. like. $C(\alpha)$	$15.7 \exp(0.46(1 - n))$		12

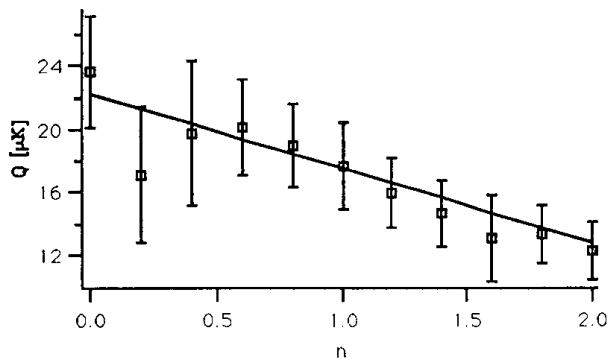


Figure 5: Modelos  $(Q, n)$  que mejor ajustan los datos de COBE del primer año y ajuste a una linea recta.

Figure 5: Modelos  $(Q, n)$  que mejor ajustan los datos de COBE del primer año y ajuste a una linea recta.

## REFERENCIAS

- Adler, R. J. 1981, *The geometry of Random Fields* (New York: Wiley)
- Bennett, C., et al. 1994 COBE-Preprint 94-01 and astro-ph/9401012
- Bond, J. R. 1994, astro-ph/9407044
- Bond, J. R., & Efstathiou, G. 1987, *MNRAS*, 226, 655
- Górski, K. M., et al. 1994, COBE-PREPRINT
- Gott, J. R., et al. 1990, *ApJ*, 352, 1
- Hu, et al. 1994, *ApJ*, 430, L5
- Sachs, K. & Wolfe, A. M. 1967, *ApJ*, 147, 73
- Seljak, U. & Bertschinger, E. 1993, *ApJ*, 417, L9
- Smoot, G. F., et al. 1994, COBE-PREPRINT 94-03.
- Smoot, G. F., et al. 1992, *ApJ*, 396, L1
- Torres, et al. 1994a, *Astron. Astrophys.*, 287, 15
- Torres, S. 1994b, *ApJ*, 423, L9
- Torres, S., et al. 1994c, *MNRAS* (submitted)
- Torres, et al. 1989 in *Data Analysis in Astronomy*, III, ed. V. di Gesu, L. Scarsi, & M. Macarone (New York: Plenum), 319
- Wright, E. L., et al. 1994a, *ApJ*, 420, 1
- Wright, E. L., et al. 1994b, COBE-PREPRINT 94-02 and astro-ph/9401015.